УДК 517.936

О ВЫПУКЛОСТИ МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ ПФАФФА

канд. физ.-мат. наук А.А. КОЗЛОВ
(Полоцкий государственный университет)

Одним из актуальных направлений развития теории управления систем обыкновенных дифференциальных уравнений является изучение геометрических свойств множества достижимости таких систем (выпуклость, замкнутость и др.). Свойство выпуклости множества достижимости управляемых дифференциальных систем означает, что для таких систем в качестве управляющего воздействия можно выбирать не только отдельные допустимые управления, но и их линейные комбинации. Поэтому наличие такого свойства позволяет существенно упростить и облегчить решение многих прикладных задач теории управления систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

В данной статье для линейной управляемой системы в полных дифференциалах (системы Пфаффа) введено понятие множества достижимости и доказана выпуклость этого множества в случае выпуклости множества всех допустимых для этой системы управлений.

Постановка задачи. Рассмотрим линейную управляемую систему Пфаффа

$$dx = (A_1(t)x + B_1(t)u)dt_1 + (A_2(t)x + B_2(t)u)dt_2 + \ldots + (A_m(t)x + B_m(t)u)dt_m, \qquad (1)$$

$$x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^k, \quad t = (t_1, \ldots, t_m) \in \mathbb{R}^m_+, \quad \mathbb{R}_+ := [0, +\infty),$$

где u – вход (управление); x – выход (состояние системы) с ограниченными кусочно-непрерывными матрицами коэффициентов A_i и B_i, $i = \overline{1, m}$ соответствующих размерностей.

Определение 1. Управление $u(t)$, $t \in \square^m_+$ будем называть допустимым, если оно кусочно-непрерывно, в любой момент времени t принимает значения из заданного ограниченного множества $U \subset \mathbb{R}^k$, т.е.

$$u(t) \in U \text{ для всех } t \in \mathbb{R}^m_+,$$

и при этом для системы (1) с этим управлением выполняется условие полной интегрируемости (условие Фробениуса) [1, с. 44]:

$$\frac{\partial A_i(t)}{\partial t_j} + A_i(t)A_j(t) = \frac{\partial A_j(t)}{\partial t_i} + A_j(t)A_i(t), \qquad (2)$$

$$A_i(t)B_j(t)u(t) + \frac{\partial (B_i(t)u(t))}{\partial t_j} = A_j(t)B_i(t)u(t) + \frac{\partial (B_j(t)u(t))}{\partial t_i}, \quad i, j = \overline{1, m}. \qquad (3)$$

Определение 2. Пусть $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_m)$, $\tau_i \in (0, +\infty)$, $i = \overline{1, m}$ – некоторый фиксированный момент времени. Множество $Q \subset \mathbb{R}^n$, составленное из положений в момент $t = \tau$ векторов-выходов $x(t)$ системы Пфаффа (1), порожденных всевозможными допустимыми управлениями при условии, что в начальный момент $t_0 = (0, 0, \ldots, 0)$ все входы одинаковы, называется множеством достижимости системы (1).

Определение 3. Множество M называется выпуклым [2, с. 21], если для любых $x_1, x_2 \in M$ и чисел α, β, таких, что $\alpha, \beta \in [0,1]$, $\alpha + \beta = 1$, выполняется условие:

$$(\alpha x_1 + \beta x_2) \in M .$$

Иными словами, множество M выпукло, если из того, что две точки принадлежат этому множеству, следует, что и весь отрезок, соединяющий их, принадлежит M.

Для линейных управляемых систем обыкновенных дифференциальных уравнений с кусочно-непрерывными коэффициентами:

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad t \square 0, \qquad (4)$$

известно [2, с. 20 – 22], что в случае выпуклости множества U значений кусочно-непрерывных управлений $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $t \geq 0$ множество достижимости системы (4) с такими управлениями также выпукло.

В настоящей работе доказана выпуклость множества достижимости линейных управляемых систем Пфаффа (1) при условии выпуклости множества их допустимых управлений.

Основным ее результатом является следующая

ТЕОРЕМА. *Если для системы Пфаффа (1) множество значений* $U \subset \mathbb{R}^k$ *допустимых управлений выпукло, то множество достижимости* $Q \subset \mathbb{R}^n$ *этой системы также выпукло.*

Доказательство. Пусть множество значений допустимых управлений U выпукло. Возьмем произвольные точки $x_1, x_2 \in Q \subset \mathbb{R}^n$. Тогда в силу определения множества достижимости Q существуют допустимые управления $u_1(t),\ u_2(t) \in U,\ t \in \mathbb{R}_+^m$, которые переводят состояние $x_0 \in \mathbb{R}^n$ системы (1) в состояния $x_1 \in \mathbb{R}^n$ и $x_2 \in \mathbb{R}^n$ соответственно за время $\tau \in \mathbb{R}_+^m$ и такие, что для всех $i, j = \overline{1,m},\ \ k = 1,2$ выполняются равенства (2) и

$$A_i(t)B_j(t)u_k(t) + \frac{\partial(B_i(t)u_k(t))}{\partial t_j} = A_j(t)B_i(t)u_k(t) + \frac{\partial(B_j(t)u_k(t))}{\partial t_i}. \tag{5}$$

Возьмем управление

$$u(t) = \alpha u_1(t) + \beta u_2(t), \quad t \in \mathbb{R}_+^m, \quad \alpha, \beta \in [0,1], \quad \alpha + \beta = 1. \tag{6}$$

Тогда управление u кусочно непрерывно как линейная комбинация кусочно-непрерывных функций u_1 и u_2. Поскольку множество U выпукло, то значения управления $u(t),\ \ t \in \mathbb{R}_+^m$, принадлежат множеству U. Кроме того, используя соотношения (5), для всех $i, j = \overline{1,m}$ получим равенства

$$A_i(t)B_j(t)u(t) + \frac{\partial(B_i(t)u(t))}{\partial t_j} = A_i(t)B_j(t)(\alpha u_1(t) + \beta u_2(t)) + \frac{\partial(B_i(t)(\alpha u_1(t) + \beta u_2(t)))}{\partial t_j} =$$

$$= \alpha\Big(A_i(t)B_j(t)u_1(t) + \frac{\partial(B_i(t)u_1(t))}{\partial t_j}\Big) + \beta\Big(A_i(t)B_j(t)u_2(t) + \frac{\partial(B_i(t)u_2(t))}{\partial t_j}\Big) =$$

$$= \alpha\Big(A_j(t)B_i(t)u_1(t) + \frac{\partial(B_j(t)u_1(t))}{\partial t_i}\Big) + \beta\Big(A_j(t)B_i(t)u_2(t) + \frac{\partial(B_j(t)u_2(t))}{\partial t_i}\Big) =$$

$$= A_j(t)B_i(t)(\alpha u_1(t) + \beta u_2(t)) + \frac{\partial(B_j(t)(\alpha u_1(t) + \beta u_2(t)))}{\partial t_i} = A_j(t)B_i(t)u(t) + \frac{\partial(B_j(t)u(t))}{\partial t_i},$$

означающие выполнение для системы Пфаффа (1) с управлением (6) условия полной интегрируемости. Следовательно, выбранное управление (6) является допустимым.

Запишем систему (1) с управлением $u = u(t)$ в бескоординатной форме [1, с. 43]:

$$x'h = A(t)hx + B(t)u(t)h. \tag{7}$$

Здесь x' означает производную Фреше [1, с. 14] отображения

$$x : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n;$$

h – произвольный вектор из $\mathbb{R}^m$; функции A и B определены и непрерывны на $\mathbb{R}_+^m$ и принимают значения из пространств

$$L(\mathbb{R}^m, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)) \ \text{ и } \ L(\mathbb{R}^m, L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n))$$

соответственно, где $L(E,F)$ – пространство линейных отображений множества E во множество F. Функция $B(t)u(t)$ определена и непрерывна на множестве $\mathbb{R}_+^m$ и принимает значения в пространстве $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$.

Пусть $W(t)$ – фундаментальный оператор [1, с. 47] системы (7) с нулевым управлением, т.е. системы

$$x'h = A(t)hx, \quad h \in \mathbb{R}^m.$$

Обозначим через $W(t,t_0)$ фундаментальный оператор $W(t)$, удовлетворяющий начальному условию

$$W(t_0) = I_{\mathrm{P}^n},$$

где I_{P^n} – единичный оператор в P^n. Тогда решение уравнения (7) записывается в виде [1, с. 47]:

$$x(t) = W(t,t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} W(x,v)B(v)u(v)dv .$$

Здесь в качестве интеграла берется криволинейный интеграл. Отсюда в силу формул (6) и свойства линейности криволинейного интеграла имеем равенства:

$$x(\tau) = W(\tau,t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{\tau} W(x,v)B(v)(\alpha u_1(v) + \beta u_2(v))dv = (\alpha+\beta)W(\tau,t_0)x(t_0) + \alpha\int_{t_0}^{\tau} W(x,v)B(v)u_1(v)dv +$$

$$+\beta\int_{t_0}^{\tau} W(x,v)B(v)u_2(v)dv = \alpha\,(W(\tau,t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{\tau} W(x,v)B(v)u_1(v)dv) +$$

$$+\beta\,(W(\tau,t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{\tau} W(x,v)B(v)u_2(v)dv) = \alpha x_1(\tau) + \beta x_2(\tau),$$

где $x_1(t)$ и $x_2(t)$, $t \in \mathbb{R}^m_+$ – решения системы (7) с управлениями $u = u_1(t)$ и $u = u_2(t)$ соответственно. В силу выбора функций $u_i(t)$, $i = 1, 2$ получим соотношения:

$$x(\tau) = \alpha x_1(\tau) + \beta x_2(\tau) = (\alpha x_1 + \beta x_2) \in Q .$$

Последнее означает, что для любой точки x, лежащей на отрезке, соединяющим две точки множества достижимости Q, найдется допустимое управление, приводящее траекторию системы (1), в точку x. Теорема доказана.

Работа выполнена в рамках задания Ф10М-032 «Управление асимптотическими характеристиками линейных дифференциальных систем; разработка метода построения аналитических решений нелинейных уравнений в частных производных специального вида» Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований «Наука М-2010 ».

ЛИТЕРАТУРА

1. Гайшун, И.В. Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения / И.В. Гайшун. – М.: Наука и техника, 1983.
2. Габасов, Р.Ф. Оптимизация линейных систем. Методы функционального анализа / Р.Ф. Габасов, Ф.М. Кириллова. – Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1973.

Поступила 16.09.2009

ON CONVEXITY OF SET OF ATTAINABILITY OF LINEAR CONTROL SYSTEMS OF PFAFF

A. KOZLOV

One of actual directions of development of the theory of control of systems of the ordinary differential equations is studying of geometrical properties of set of attainability of such systems (convexity, closure, etc.). Property of convexity of set of attainability of control differential systems means that for such systems as control action it is possible to choose not only separate admissible controls, but also their linear combinations. Therefore presence of such property allows to simplify and facilitate essentially the solution of many applied problems of the theory of control of systems of ordinary differential equations.

In given article for linear control system of Pfaff is entered the concept of set of attainability and is proved convexity of this set in case of convexity of set of all admissible controls for this system.